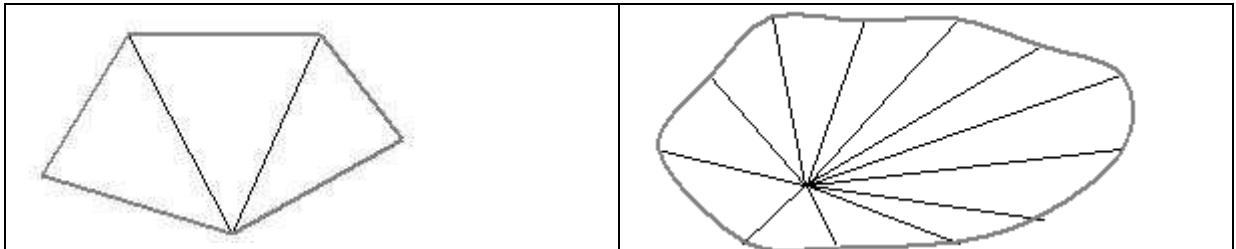


MÉTODOS DE CÁLCULO DE ÁREAS**DIVISÃO DA ÁREA EM TRIÂNGULOS**

Quando a área a medir tem um contorno de linha poligonal, divide-se em figuras geométricas simples, geralmente triângulos, das quais se sabe determinar a área. A área total requerida é o somatório das parcelas.



Nos cálculos temos de ter em atenção que as distâncias medidas na carta são distâncias gráficas e que pretendemos obter a área em distâncias naturais no terreno.

Exemplificando com o Triângulo:

A área do triângulo é igual a metade da base multiplicada pela altura: $A = (B \times A) / 2$

Para obter a área natural temos de multiplicar aqueles valores pelo denominador da escala (M):

$$A = \frac{(B * M) * (A * M)}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{B * A}{2} * M^2$$

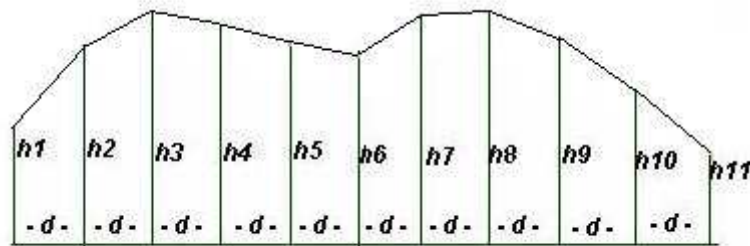
Em que **B** e **A** são os comprimentos da base e da altura do triângulo medidos na carta e **M** é o denominador da escala da carta.

MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

Se a área a medir tem contornos curvos, pode utilizar-se o Método dos Trapézios. Trata-se de um método expedito, pouco rigoroso, em que o contorno curvo é substituído por uma linha poligonal.

Descrição do Método

A área a medir é dividida em um conjunto de trapézios, todos com a mesma altura e em número par. A linha curva é substituída por segmentos de recta, cada um formando um dos lados de um trapézio. Calculada a área de cada um destes, a área procurada é o somatório das parcelas.



A área de cada trapézio, (Base maior mais base menor sobre 2 vezes a altura) $S = \frac{B + b}{2} * H$ em que a altura é a distância **d**, igual para todos os trapézios, e as bases são as ordenadas **h**.

Calculam-se as áreas individuais de cada trapézio e faz-se o somatório. A fórmula é:

$$S = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} + h_n) = d \left(\frac{h_1 + h_n}{2} + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} \right)$$

No caso vertente com 10 trapézios e **n** = 11 teríamos:

$$S = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2 + h_2 + h_3 + h_3 + h_4 + h_4 + h_5 + h_5 + h_6 + h_6 + h_7 + h_7 + h_8 + h_8 + h_9 + h_9 + h_{10} + h_{10} + h_{11})$$

Ou:

$$S = \frac{1}{2} d (h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + 2h_5 + 2h_6 + 2h_7 + 2h_8 + 2h_9 + 2h_{10} + h_{11})$$

Ou:

$$S = \frac{1}{2} d \left(h_1 + h_{11} + 2(h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 + h_8 + h_9 + h_{10}) \right)$$

Ou:

$$S = d \left(\frac{h_1 + h_{11}}{2} + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} \right)$$

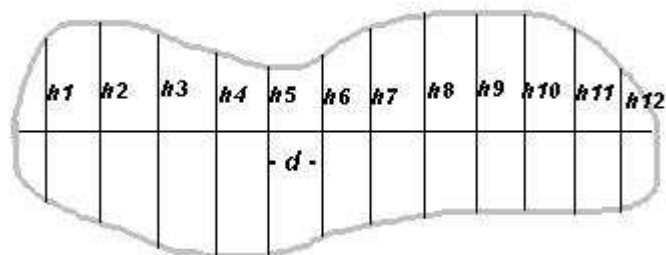
Dando valores às ordenadas e com $d = 2$ ficaria no exemplo:

$h_1 = 12$; $h_2 = 15$; $h_3 = 17$; $h_4 = 16.8$; $h_5 = 14.9$; $h_6 = 14.6$; $h_7 = 16.9$; $h_8 = 17.1$; $h_9 = 15.6$; $h_{10} = 14.6$
e $h_{11} = 9.8$, podemos escrever:

$$S = 2 \left(\frac{12 + 9.8}{2} + 15 + 17 + 16.8 + 14.9 + 14.6 + 16.9 + 17.1 + 15.6 + 14.6 \right)$$

$$S = 2 \left(\frac{21.8}{2} + 142.5 \right) = 2 \left(\frac{21.8}{2} + \frac{142.5}{1} \right) = 2 \left(\frac{21.8}{2} + \frac{285}{2} \right) = 2 \left(\frac{306.8}{2} \right) = 306.8$$

Caso a área a medir seja totalmente limitada por uma linha curva, faz-se uma adaptação do método conforme figura seguinte, em que é traçada uma linha recta segundo a maior dimensão da figura:



Aplicando a mesma fórmula daria o dobro da área (no caso das duas partes serem simétricas, as ordenadas teriam o dobro do comprimento). Assim, na fórmula anterior, os valores:

$$S = 2 \left(\frac{12 + 9.8}{2} + 15 + 17 + 16.8 + 14.9 + 14.6 + 16.9 + 17.1 + 15.6 + 14.6 \right)$$

seriam substituídos por:

$$S = 2 \left(\frac{24 + 19.6}{2} + 30 + 34 + 33.6 + 29.8 + 29.2 + 33.8 + 34.2 + 31.2 + 29.2 \right)$$

obtendo-se o dobro da área anterior:

$$S = 2 \left(\frac{43.6}{2} + 285 \right) = 2(306.8) = 613.6$$

MÉTODO E FÓRMULA DE SIMPSON

Neste método, definem-se intervalos iguais e em número par, como no processo anterior. Em cada dois intervalos, substitui-se a curva que define o contorno da área a medir por um arco de parábola e formam-se duas figuras geométricas: um paralelogramo e um trapézio.

Calcula-se a área destas duas figuras para cada dois intervalos. A área total será o total das áreas parciais calculadas para cada par de intervalos.

Explicação Detalhada do Método

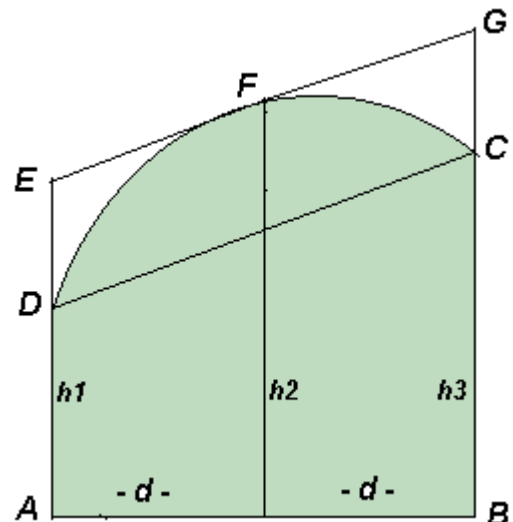
Na figura ao lado **DC** e **EG** paralelas.
h1, **h2** e **h3** são perpendiculares à base **AB**.

d representa cada um dos intervalos iguais acima referidos, em que se dividiu a área.

Podemos então considerar o **Paralelogramo CDEG** e o **Trapézio ABCD**

O arco **DFC** é um dos arcos de parábola que delimitam a área a medir.

A área a medir compreendida nos dois intervalos, é a área total do Trapézio **ABCD** mais a área compreendida entre o arco de parábola e a sua corda **DC**



Da Geometria sabemos a área de um segmento parabólico é igual a **2/3** do paralelogramo que o envolve, neste caso igual a **2/3** do paralelogramo **CDEG**

Portanto a área em cada dois intervalos **d** é igual à área total do trapézio **ABCD** mais **2/3** do Paralelogramo **CDEG**. Podemos então escrever (área paralelogramo = área retângulo com a mesma base e mesma altura).

Deste modo, para os primeiros dois intervalos, podemos escrever:

$$S_1 = \frac{h_1+h_3}{2} * 2d + \frac{2}{3} \left(h_2 - \frac{h_1+h_3}{2} \right) * 2d \quad (1) \quad (2d \text{ é a altura})$$

Colocando 2d em evidência:

$$S_1 = 2d \left(\frac{h_1+h_3}{2} + \frac{2}{3} \left(h_2 - \frac{h_1+h_3}{2} \right) \right) \quad (2)$$

ou:

$$S_1 = 2d \left(\frac{h_1+h_3}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{2h_2-h_1-h_3}{2} \right) \right) \quad (3)$$

Efectuando as operações e eliminando um parentesis :

$$S_1 = 2d \left(\frac{h_1+h_3}{2} + \frac{4h_2-2h_1-2h_3}{6} \right) \quad (4)$$

Reduzindo ao mesmo denominador as fracções:

$$S_1 = 2d \left(\frac{3h_1+3h_3}{6} + \frac{4h_2-2h_1-2h_3}{6} \right) \quad (5)$$

Ou:

$$S_1 = 2d \left(\frac{3h_1+3h_3+4h_2-2h_1-2h_3}{6} \right) \quad (6)$$

Somando e dividindo por 2 o numerador e o denominador:

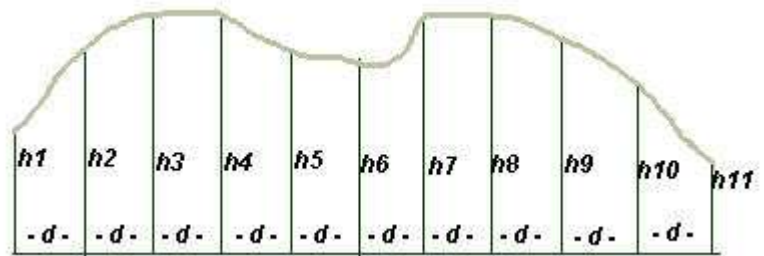
$$S_1 = 2d \left(\frac{h_1+4h_2+h_3}{6} \right) = \frac{2d(h_1+4h_2+h_3)}{6} = \frac{d(h_1+4h_2+h_3)}{3} = \frac{d}{3} (h_1+4h_2+h_3) \quad (7)$$

Para cada dois intervalos seguintes seria:

$$S_2 = \frac{d}{3} (h_3+4h_4+h_5); \quad S_3 = \frac{d}{3} (h_5+4h_6+h_7) \dots e \text{ assim sucessivamente.}$$

Exemplo:

Supondo na figura ao lado uma área delimitada por arcos de parábola, com 10 intervalos d iguais, tínhamos:



$$S_1 = \frac{d}{3}(h_1 + 4h_2 + h_3)$$

$$S_2 = \frac{d}{3}(h_3 + 4h_4 + h_5)$$

$$S_3 = \frac{d}{3}(h_5 + 4h_6 + h_7)$$

$$S_4 = \frac{d}{3}(h_7 + 4h_8 + h_9)$$

$$S_5 = \frac{d}{3}(h_9 + 4h_{10} + h_{11})$$

Verifica-se destas expressões que $S_n = \frac{d}{3}(h_{2 \cdot n - 1} + 4h_{2 \cdot n} + h_{2 \cdot n + 1})$

Cálculo

Calculam-se as áreas parciais S_1 , S_2 , S_3 , S_4 e S_5 e depois efectua-se a soma das parcelas. Tendo $d = 2$ e os comprimentos das ordenadas h :

$h_1 = 12$; $h_2 = 15$; $h_3 = 17$; $h_4 = 16.8$; $h_5 = 14.9$; $h_6 = 14.6$; $h_7 = 16.9$; $h_8 = 17.1$; $h_9 = 15.6$; $h_{10} = 14.6$ e $h_{11} = 9.8$

Será:

$$S_1 = 2/3(12 + 4 \times 15 + 17) = 2/3 \times 89 = 59.333$$

$$S_2 = 2/3(17 + 4 \times 16.8 + 14.9) = 2/3 \times 99.1 = 66.067$$

$$S_3 = 2/3(14.9 + 4 \times 14.6 + 16.9) = 2/3 \times 90.2 = 60.133$$

$$S_4 = 2/3(16.9 + 4 \times 17.1 + 15.6) = 2/3 \times 100.9 = 67.267$$

$$S_5 = 2/3(15.6 + 4 \times 14.6 + 9.8) = 2/3 \times 83.8 = 55.867$$

$$\text{Área Total} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 59.333 + 66.067 + 60.133 + 67.267 + 55.867 = 308.667$$

Note-se que o mesmo exemplo empregando o **Método dos Trapézios** tínhamos obtido **306.8** o que prova que o Método de Simpson é mais preciso.

Caso a área seja limitada totalmente por uma linha curva, procedemos de forma análoga à do método dos trapézios. Com o exemplo anterior, caso as duas metades da área fossem simétricas, teríamos de aumentar para o dobro o valor das ordenadas, ficando:

$$S_1 = 2/3(24 + 4 \times 30 + 34) = 2/3 \times 178 = 118.667$$

$$S_2 = 2/3(34 + 4 \times 33.6 + 29.8) = 2/3 \times 198.2 = 132.133$$

$$S_3 = 2/3(29.8 + 4 \times 29.2 + 33.8) = 2/3 \times 180.4 = 120.267$$

$$S_4 = 2/3(33.8 + 4 \times 34.2 + 31.2) = 2/3 \times 201.8 = 134.533$$

$$S_5 = 2/3(31.2 + 4 \times 29.2 + 19.6) = 2/3 \times 167.6 = 111.733$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 118.667 + 132.133 + 120.267 + 134.533 + 111.733 = \mathbf{617.333}$$

Com o Método dos Trapézios tínhamos obtido **613.600**

MÉTODO MECANICO - DIGITAL

A área numa carta ou planta topográfica também pode ser medida utilizando um instrumento denominado planímetro. Existem planímetros mecânicos e digitais sendo estes actualmente os mais vulgares.

A principal diferença entre eles é que os mecânicos utilizam mecanismos de pequenas rodas dentadas que fazem a desmultiplicação.

Para obter a área é necessário contar as voltas e ler a graduação do aparelho e depois calcular a área em função da escala do documento.

Nos digitais, a escala e constantes do aparelho são introduzidas antes das medições, e o resultado é mostrado num pequeno visor de cristais líquidos. Geralmente efectuam mais umas operações de cálculos adicionais.



Um planímetro é composto essencialmente por um corpo, também chamado Pólo, que deve ficar fixo dentro ou fora da área a medir, e por um braço articulado.

Na extremidade do braço existe uma lupa e no centro desta está gravada uma marca, geralmente uma cruzeta, denominada traçador.

Alguns, como o da imagem anterior, possuem um candeeiro para auxiliar na medição.

Modus Operandi

(1) - Antes de começar a efectuar a medição, devemos ler as instruções que vêm de fábrica com o aparelho para nos certificarmos do seu modo de funcionamento, das constantes a introduzir e outras utilidades de que eventualmente venha equipado.

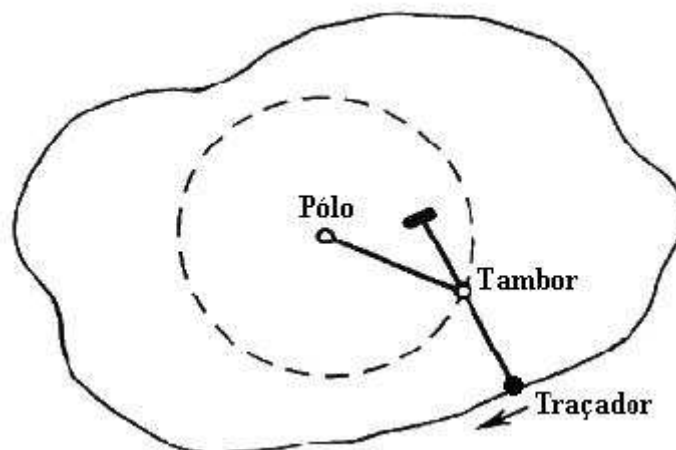
(2)- Fixar bem o documento no qual se pretende medir a área, sem dobras ou rugas numa superfície plana e lisa.

(3)- Colocar o instrumento sobre o documento, dentro ou fora da área a medir, mas assegurando que o braço articulado abrange toda a área a medir sem arrastar o corpo do aparelho.

(4)- Introduzir a escala e constantes do aparelho e colocar a contagem a zeros.

(5)- Percorrer com o traçador com o auxílio da lupa e com todo o cuidado os contornos da área a medir, no mesmo sentido, sem arrastamentos, vindo terminar no ponto inicial.

(6) Ler o resultado no visor.



Dicas:

a)- Antes de efectuar uma medição, testar o aparelho medindo uma área já conhecida.

b)- Nunca confiar numa só medição. Devem efectuar-se várias repetições e comparar os resultados.

c)- Elaborar uma ficha de utilização do aparelho, onde constarão as instruções, passo a passo, que devem ser seguidas pelo utilizador numa medição, utilizando correctamente o aparelho.

Esta ficha, que deve ser guardada junto do aparelho, é bastante útil porque, como geralmente não se utiliza o aparelho todos os dias, esquecemo-nos do seu funcionamento e evita termos de ler novamente as instruções.

CÁLCULO ANALÍTICO PELA FÓRMULA DE GAUSS

A fórmula de **GAUSS** permite calcular analiticamente e com precisão a área de uma superfície poligonal fechada através das coordenadas dos vértices.

Demonstra-se que a área de qualquer polígono fechado pode ser determinada analiticamente através das coordenadas dos seus vértices.

Tendo um polígono de que se conhecem as coordenadas dos vértices, o processo consiste, grosso modo, em determinar as áreas de alguns trapézios, cujos lados se obtêm através das diferenças de coordenadas dos vértices do polígono, e a seguir subtrair a área que não interessa obtendo a área do polígono.

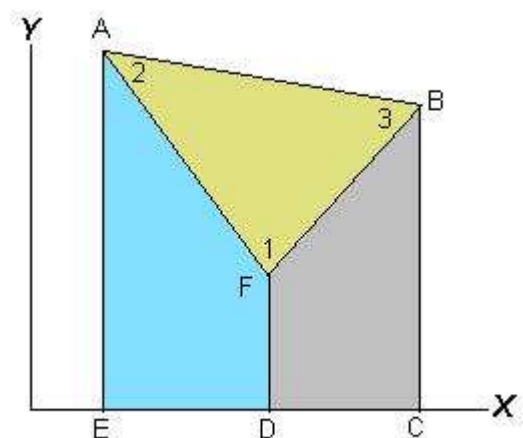
Quanto mais vértices o polígono tiver, mais trapézios podem ser construídos o que complica a demonstração. Por isso vamos exemplificar com um polígono de apenas três vértices – um triângulo.

Assim, na figura ao lado, temos o triângulo **ABF** do qual queremos calcular a área, e cujos vértices são definidos pelas coordenadas dos vértices **1**, **2** e **3**.

Na figura consideramos também três trapézios:
- o trapézio **AEDF** (azul), o trapézio **BCDF** (cinza)
e o trapézio maior e que engloba a área dos primeiros e do polígono, **ABCE**

Portanto, se à área do trapézio maior subtrairmos as áreas dos dois trapézios menores obteremos a área do triângulo **ABF**.

A área de um trapézio é obtida através das medidas dos lados, pela fórmula $(B+b)/2 \cdot H$. As medidas dos lados são obtidas pela diferença de coordenadas dos vértices.



Por exemplo a altura do trapézio maior é igual a $(X_C - X_E)$. A área dos trapézios na figura será:

Trapézio **AEDF** - $S_1 = (X_1 - X_2) \cdot (Y_1 + Y_2) / 2$ (Trapézio pequeno azul)

Trapézio **BCDF** - $S_2 = (X_3 - X_1) \cdot (Y_3 + Y_1) / 2$ (Trapézio pequeno cinza)

Trapézio **ABCE** - $S_3 = (X_3 - X_2) \cdot (Y_3 + Y_2) / 2$ (Trapézio maior)

A área do polígono procurada (**S**) será portanto igual a :

$$S = S_3 - S_2 - S_1$$

Quanto mais vértices houver mais precisão será obtida na área medida. Demonstra-se também que o procedimento é válido para polígonos com qualquer número de vértices igual ou superior a três.

Procedimento Prático

Na prática podemos calcular a área do polígono seguindo os 4 passos seguintes. É dado o exemplo de um polígono com 5 vértices:

(1)- Em primeiro lugar, ordenam-se os pontos coordenados da figura segundo o mesmo sentido: **P1, P2, P3 ... Pn**

PONTOS	X	Y
1	120.41	667.46
2	341.16	819.74
3	718.59	665.49
4	821.74	401.60
5	297.61	384.13

(2)- Efectuam-se as diferenças de coordenadas X e Y , pela ordem seguinte:

	X	DIF X	Y	DIF Y
1	X1 - X3 =	- 598.18	Y1 - Y3 =	1.97
2	X2 - X4 =	- 480.58	Y2 - Y4 =	418.14
3	X3 - X5 =	420.98	Y3 - Y5 =	281.36
4	X4 - X1 =	701.33	Y4 - Y1 =	- 265.86
5	X5 - X2 =	- 43.55	Y5 - Y2 =	- 435.61

Observar que, para qualquer número de vértices, as diferenças **DIF X** e **Dif Y** são feitas sempre do primeiro para o terceiro vértice (primeira linha) e do último para o segundo (última linha).

(3)- Multiplicam-se as coordenadas X e Y pelas diferenças DIF X e DIF Y

Observar que as diferenças DIF X e Dif Y são ordenadas nesta tabela começando pela última: 5, 1, 2, 3 e 4

PONTOS	X	Y	DIF X _(n-1)	DIF Y _(n-1)	X . DIF Y	Y . DIF X
1	120.41	667.46	- 43.55	- 435.61	-52451.8001	-29067.8830
2	341.16	819.74	- 598.18	1.97	672.0852	-490352.0732
3	718.59	665.49	- 480.58	418.14	300471.2226	-319821.1842
4	821.74	401.60	420.98	281.36	231204.7664	169065.5680
5	297.61	384.13	701.33	- 265.86	79122.5946	269401.8929
TOTAIS =					+400773.6795	-400773.6795

Nota: Os totais de X.DIF Y e Y.DIF X devem anular-se para confirmar o cálculo.

(4)- A área procurada é igual ao valor absoluto de um dos somatórios a dividir por 2:

$$\text{Área} = 400773.6795 / 2 = \mathbf{200386.8398 \text{ m}^2}$$

SEGUNDO EXEMPLO

(1)- Coordenadas dos Vértices

PONTOS	X	Y
1	0.00	0.00
2	40.00	40.00
3	99.99	49.98
4	90.03	-9.96
5	50.02	10.02

(2)- Diferenças de coordenadas X e Y :

	X	DIF X	Y	DIF Y
1	X1 - X3 =	-99.99	Y1 - Y3 =	-49.98
2	X2 - X4 =	-50.03	Y2 - Y4 =	49.96
3	X3 - X5 =	49.97	Y3 - Y5 =	39.96
4	X4 - X1 =	90.03	Y4 - Y1 =	-9.96
5	X5 - X2 =	10.02	Y5 - Y2 =	-59.98

(3)- Multiplicar **X** por **DIF Y** e **Y** por **DIF X** (ordenando segundo a regra atrás citada)

PONTOS	X	Y	DIF X _(n-1)	DIF Y _(n-1)	X . DIF Y	Y . DIF X
1	0.00	0.00	10.02	-59.98	0	0
2	40.00	40.00	-99.99	-49.98	-1999.2000	-3999.6000
3	99.99	49.98	-50.03	49.96	+4995.5004	-2500.7012
4	90.03	-9.96	49.97	39.96	+3597.5988	-497.7012
5	50.02	10.02	90.03	-9.96	-498.1992	+902.1006
TOTAIS =					+6095.7000	-6095.7000

(4) A área procurada é $6095.7000 / 2 = 3047.85 \text{ m}^2$

Notar que os somatórios **X . DIF Y** e **Y .DIF X** se anulam confirmando o cálculo.

Comentário: O cálculo dos dois somatórios, duplo cálculo, funciona como auto-teste e é importante pois detecta eventuais anomalias ocorridas no cálculo. Como se disse os dois resultados devem anular-se.

PROCESSO RÁPIDO DA FÓRMULA DE GAUSS

Um método mais rápido, sem confirmação, consiste nas duas operações seguintes (P. Ferreira):

(1) Ordenar os pontos coordenados do seguinte modo:

	1	2	3	4	5	1
X	100	130	190	300	380	100
Y	90	250	380	300	120	90

(2) Efectuar separadamente os somatórios dos produtos indicados pelas setas azuis e pelas setas pretas e subtrair as pretas das azuis:

Y1	x	X2	11700	X1	x	Y2	25000
Y2	x	X3	47500	X2	x	Y3	49400
Y3	x	X4	114000	X3	x	Y4	57000
Y4	x	X5	114000	X4	x	Y5	36000
Y5	x	X1	12000	X5	x	Y1	34200
Soma(Y.X) =			299200	Soma(X.Y) =			201600
Área = (Soma(Y.X) - (Soma(X.Y)) / 2 = (299200 - 201600) / 2 =							48800

Aplicação deste Método ao Primeiro Exemplo

PONTOS	X	Y
1	120.41	667.46
2	341.16	819.74
3	718.59	665.49
4	821.74	401.60
5	297.61	384.13

	1	2	3	4	5	1
X	120.41	341.16	718.59	821.74	297.61	120.41
Y	667.46	819.74	665.49	401.60	384.13	667.46

Y1	x	X2	227710.6536	X1	x	Y2	98704.8934
Y2	x	X3	589056.9666	X2	x	Y3	227038.5684
Y3	x	X4	546859.7526	X3	x	Y4	288585.7440
Y4	x	X5	119520.1760	X4	x	Y5	315654.9862
Y5	x	X1	46253.0933	X5	x	Y1	198642.7706
Soma(Y.X) =			1529400.6420	Soma(X.Y) =			1128626.9630
Área = (Soma(Y.X) – (Soma(X.Y)) / 2 = (1529400.6420 – 1128626.9630) / 2 =							200386.8397

MÉTODO DAS COORDENADAS POLARES

É outro processo analítico eficaz para calcular a área de uma parcela de terreno em forma de polígono através das coordenadas polares, rumos e distâncias, para os vértices do polígono.

Trabalho de Campo

Estacionando de num ponto notável, dentro ou fora da área a calcular, de onde possam ser observados todos os vértices, efectua-se as leituras azimutais e zenitais para cada um deles, através de um giro e medem-se as distâncias.

Os rumos podem ser obtidos de duas formas:

- Efectuar as observações no mesmo sentido, percorrendo ordenadamente todos os vértices e fechando no primeiro, onde deve ser verificado o erro de fecho. Neste caso as leituras azimutais consideram-se rumos fictícios para os pontos para efeito do cálculo das coordenadas.

Neste caso as observações não podem ser interrompidas até visar novamente o primeiro ponto, isto é, o giro é efectuado de uma só vez.

- Optar por medir todos os ângulos através das leituras azimutais. Neste caso, calculam-se os ângulos são pelas diferenças de leituras à esquerda e à direita – **Leitura à Direita – Leitura à Esquerda**.

No caso de o resultado da subtração ser negativo, tem de transformar-se em positivo somando-lhe 400 graus ou 360 graus.

Os rumos para os diferentes pontos são obtidos somando sucessivamente os ângulos ao rumo anterior: **Rumo_(i+1) = Rumo_(i) + Ângulo**

Com os rumos e distâncias podem obter-se as coordenadas fictícias planas de todos os pontos, através das fórmulas conhecidas:

$$X_P = D \cdot \text{sen}(\text{Rumo}) \text{ e } Y = D \cdot \text{cos}(\text{Rumo})$$

Para não ter que lidar com coordenadas negativas, podem atribuir-se à estação coordenadas fictícias de valor suficientemente grande para que isso não aconteça. Nesse caso as fórmulas utilizadas serão:

$$X_P = X_E + D \cdot \text{sen}(\text{Rumo}) \text{ e } Y = Y_E + D \cdot \text{cos}(\text{Rumo})$$

As distâncias (**D**) devem ser previamente reduzidas ao horizonte para que se obtenha a área plana do polígono.

Com as coordenadas assim obtidas aplica-se o **Método de Gauss** para determinar a área.

Estacionamento dentro da área a Calcular

Caso dentro da área a calcular exista um ponto de onde seja possível observar todos os vértices, é preferível utilizar esse ponto para a estação de giro. A área poderá então ser calculada de duas formas:

- através das coordenadas como no caso anterior.
- Através da resolução dos triângulo formados, entrando com duas distâncias (lados) e com o ângulo medido.

Aqui o ângulo é obtido pela mesma forma anterior: Leitura à Direita – Leitura à Esquerda, mas se o resultado da subtração for negativo, não é necessário transformar para positivo visto que o valor do seno é o mesmo: **sen(â) = sen(â – 400)**.

A área de um triângulo é dada por: $S = \frac{a * b * \text{sen}C}{2}$ em que **a** e **b** são as duas distâncias medidas e **C** o ângulo medido:

Triângulo I

$$S_1 = \frac{d_1 * d_2 * \text{sena}_1}{2}$$

Triângulo II

$$S_2 = \frac{d_2 * d_3 * \text{sena}_2}{2}$$

Triângulo III

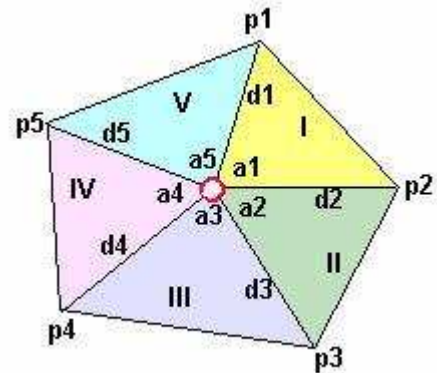
$$S_3 = \frac{d_3 * d_4 * \text{sena}_3}{2}$$

Triângulo IV

$$S_4 = \frac{d_4 * d_5 * \text{sena}_4}{2}$$

Triângulo V

$$S_5 = \frac{d_5 * d_1 * \text{sena}_5}{2}$$



A área final procurada será o somatório de $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

Aplicação Prática do Método das Coordenadas Polares

Este método é muito simples e fácil de utilizar mas tem um problema de ordem prática: nem sempre é possível observar todo o contorno da área a calcular de uma estação, quer devido à configuração do terreno quer devido à vegetação.

Nalguns casos poderá ser aconselhável dividir a área a medir em duas ou mais parcelas. Caso contrário há que efectuar uma poligonal à volta da parcela a medir para obter as coordenadas dos vértices que definem a mesma ou aplicar outros métodos.

MÉTODO DE SARRON

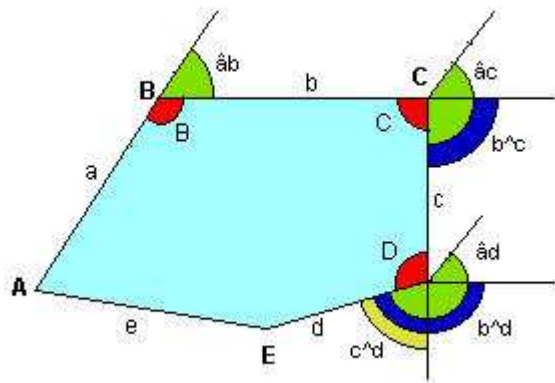
É um método analítico que permite calcular a área de um polígono conhecendo o comprimento dos lados menos 1 ($n - 1$) e a medida de $n - 2$ ângulos definidos pelos mesmos lados conhecidos.

A fórmula geral de Sarron é a seguinte:

$$S = \frac{1}{2} (ab \cdot \sin(\hat{a}b) + ac \cdot \sin(\hat{a}c) + ad \cdot \sin(\hat{a}d) + \dots + bc \cdot \sin(\hat{b}c) + bd \cdot \sin(\hat{b}d) + \dots + cd \cdot \sin(\hat{c}d) + \dots)$$

Na figura seguinte, polígono **ABCDE**:

- **a, b, c e d** representam os lados $n - 1$ conhecidos.
- **B, C e D** são os ângulos internos $n - 2$, conhecidos.
- **$\hat{a}b$, $\hat{a}c$ e $\hat{a}d$** são os denominados ângulos dirigidos e são definidos pelos vectores:



- **$\hat{a}b$** pelos vectores **AB** e **BC**.
- **$\hat{a}c$** pelo segmento paralelo a **AB** e o lado **c** do polígono.
- **$\hat{a}d$** pelo segmento paralelo a **AB** e o lado **d** do polígono.

- Notar que **$\hat{a}b$** é complementar do ângulo interno **B**.
- Notar que os ângulos dirigidos, excepto o primeiro, são o resultado de somas de outros ângulos:

$$\hat{a}c = \hat{a}b + b^c; \quad \hat{a}d = \hat{a}c + c^d \text{ etc.}$$

As fórmulas aplicáveis à área triângulo são: **$2S = a \cdot b \cdot \sin(\hat{a}b)$** ou **$S = a \cdot b \cdot \sin(200 - \hat{a}b)$**

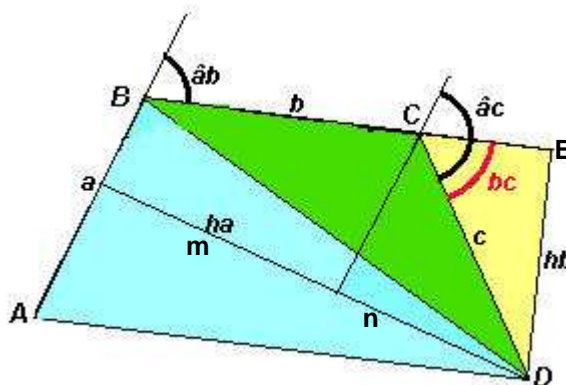
ou a clássica mais conhecida **$2S = B \cdot \text{Altura}$**

Por comodidade de cálculo neste caso acha-se **2S** e no final divide-se o resultado por 2.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE SARRON

Cálculo da área do quadrilátero **ABCD** (Soma das áreas dos triângulos **ABD** e **BCD**)

- Foi traçada uma diagonal que divide o quadrilátero nos triângulos **ABD** e **BCD**.
- O segmento que passa por **C** é paralelo ao lado **AB** e perpendicular a **ha**
- **ha** é a altura do triângulo **ABD** e **hb** é a altura do triângulo **BCD**
- **a**, **b** e **c** são lados do quadrilátero e **ab**, **ac** e **bc** são ângulos indicados na figura.



I

Área do Triângulo **BCD** = $2S = \text{Base} * \text{Altura} = b * hb$ (b é conhecido. Falta calcular hb)

(1)- A altura (**hb**) do Triângulo **BCD** é também **cateto** do triângulo **CDE** que é rectângulo.

(2)- Como: $\text{Cateto} = \text{Hipotenusa} * \text{Seno } \hat{\text{Angulo Oposto}}$ podemos escrever:

$$hb = c . \text{sen}bc$$

Então podemos escrever, substituindo **hb** pelo seu valor :

$$(3)- 2S_{BCD} = \text{Base} * \text{altura} = b * hb = b.c.\text{sen}bc$$

II

No Triângulo **ABD** temos a base **a** e altura **ha** .(conhecemos **a** falta conhecer a altura **ha**)

A altura **ha** é igual a **m + n**. Vamos determinar primeiro **n** e depois **m**:

(1)- **n** também (figura anterior) é cateto de um Triângulo Rectângulo sendo igual à hipotenusa * seno ângulo oposto. Logo podemos escrever:

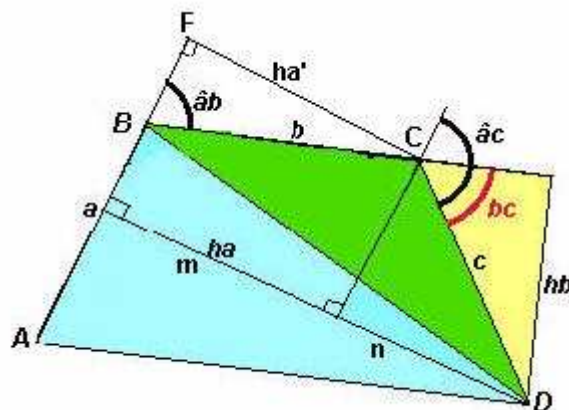
$$n = c * \text{seno}(200 - \hat{ac})$$

(2)- **m** igualmente é cateto de um triângulo rectângulo em que **b** é hipotenusa, **m** é cateto e **ab** é o ângulo oposto ao cateto.

Na figura seguinte, traçamos **ha'** paralela a **m**. Estes dois segmentos são perpendiculares aos dois segmentos paralelos, **aF** e o que passa por **C**. Logo **ha' = m** .

Como **ha'** é cateto do triângulo rectângulo **BCF** , **ab** é o ângulo oposto e **b** a hipotenusa, podemos escrever:

$$m = ha' = b * \text{seno } \hat{a}b$$



Temos então:

$$(3)- 2S_{ABD} = a.(m + n) \Rightarrow \text{Base} * \text{altura}$$

Substituindo **m** e **n** pelos seus valores, alíneas (1) e (2), fica:

$$(4)- 2S_{ABD} = a.(b * \text{sen}\hat{a}b) + a.[c.\text{sen}(200 - \hat{a}c)]$$

Ou, o que é igual:

$$(5)- 2S_{ABD} = a.b * \text{sen}\hat{a}b + a.c.\text{sen}(200 - \hat{a}c)$$

Como **sen** $\hat{a}c = \text{sen}(200 - \hat{a}c)$, podemos escrever:

$$(6)- 2S_{ABD} = a.b * \text{sen}\hat{a}b + a.c.\text{sen}\hat{a}c$$

Para o quadrilátero (os dois triângulos juntos) teremos então, juntando as fórmulas I (3) e II (6):

$$2S_{ABCD} = 2S_{ABD} + 2S_{BCD} = a.b.\text{sen}\hat{a}b + a.c.\text{sen}\hat{a}c + b.c.\text{sen}\hat{b}c$$

$$2S = a.b.\text{sen}\hat{a}b + a.c.\text{sen}\hat{a}c + b.c.\text{sen}\hat{b}c$$

Esta é a fórmula de Sarron aplicada ao Quadrilátero que pode ser generalizada para um polígono qualquer desde que sejam conhecidos os comprimentos de **n-1** lados e amplitudes de **n-2** ângulos.

APLICAÇÃO A UM POLÍGONO DE CINCO LADOS

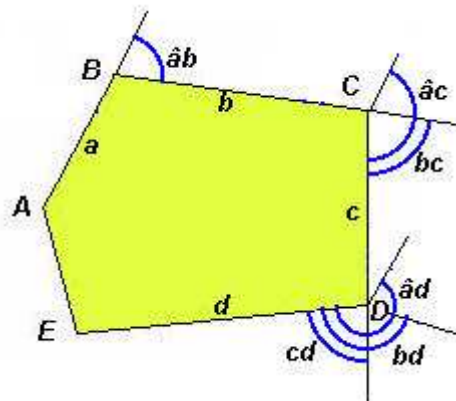
Dados

Lados **AB = a = 12.32**; **BC = b = 28.46**; **CD = c = 25.52**
DE = d = 31.59

Ângulos (gon) : **ABC = 113.656**; **BCD = 97.127**; **CDE = 116.632**

(1) Calcular os ângulos $\hat{a}b$, bc , $\hat{a}c$, cd , bd e $\hat{a}d$

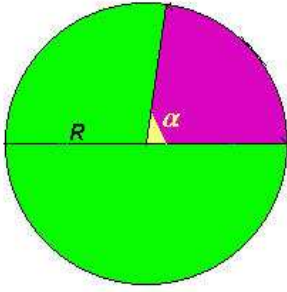
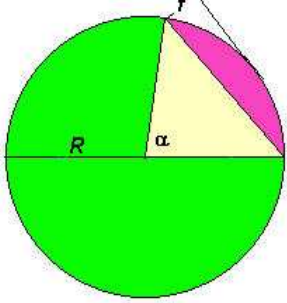
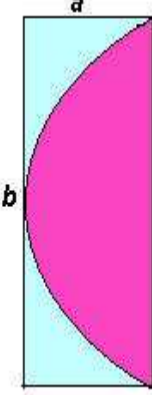
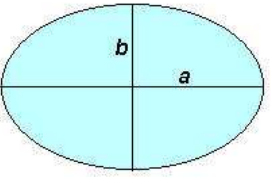
$\hat{a}b = 200 - 113.656 = 86.344$
 $bc = 200 - 97.127 = 102.873$
 $\hat{a}c = \hat{a}b + bc = 189.217$
 $cd = 200 - 116.632 = 83.368$
 $bd = bc + cd = 186.241$
 $\hat{a}d = \hat{a}c + cd = 272.58$



(2) Cálculos

$a \cdot b \cdot \sin \hat{a}b = 12.32 * 28.46 * \sin(86.344) =$	342.5913
$a \cdot c \cdot \sin \hat{a}c = 12.32 * 25.52 * \sin(189.217) =$	52.9996
$b \cdot c \cdot \sin bc = 28.46 * 25.52 * \sin(102.873) =$	725.5597
$a \cdot d \cdot \sin \hat{a}d = 12.32 * 31.59 * \sin(272.585) =$	- 353.6564
$b \cdot d \cdot \sin bd = 28.46 * 31.59 * \sin(186.241) =$	192.7991
$c \cdot d \cdot \sin cd = 25.52 * 31.59 * \sin(83.368) =$	778.8205
Soma Algébrica (2S) =	1739.1138
Área do Quadrilátero S = 2S / 2 =	869.5569

À parte o interesse didático, o Método de Sarron começa a tornar-se confuso a partir de polígonos com mais de cinco vértices pelo que, nessas situações haverá que encarar outras hipóteses. Por outro lado, também não oferece confirmação dos resultados e o trabalho de campo é tão trabalhoso como o da poligonal. Assim a alternativa mais viável será coordenar os vértices do polígono por poligonal e utilizar o Método de Gauss.

ALGUMAS FÓRMULAS COMPLEMENTARES			
SECTOR CIRCULAR	SEGMENTO CIRCULAR	SEGMENTO PARABÓLICO	ELIPSE
			
$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{400}$	$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{400} R^2 \frac{\sin \alpha}{2}$ $f = R [1 - \cos(\alpha/2)]$	$S = \frac{2}{3} ab$	$S = \frac{\pi ab}{4}$

COMENTÁRIOS FINAIS

Os métodos de cálculo de áreas podem dividir-se em dois grupos:

Métodos Geométricos: baseiam-se no cálculo de figuras geométricas e são mais apropriados para medir áreas em cartas ou plantas topográficas. Estão neste caso o método de divisão da área em triângulos – Método dos Triângulos, o Método dos Trapézios, o Método de Simpson e utilizando os planímetros.

São métodos pouco rigorosos e estão sujeitos aos erros cometidos na medição das distâncias gráficas na carta, que são maiores se a escala for pequena. Há que ter em conta que as distâncias medidas devem ser multiplicadas pelo denominador da escala dos documentos.

À parte o interesse de cada um destes métodos, a divisão da área em triângulos é um método simples e resolve o problema na maior parte dos casos de medições em plantas ou cartas.

Já nos casos em que as medições são efectuadas com rigor no terreno, como por exemplo na medição das secções em terraplanagens, os métodos geométricos tornam-se suficientemente rigorosos.

Métodos Analíticos: São métodos rigorosos apropriados para áreas em que as medições das parcelas são efectuadas directamente no terreno. O Método das Coordenadas Polares para pequenas áreas e sobretudo o Método de Gauss são os mais utilizados, este último pela conveniência em confirmar os resultados.